Početní část 1 - 7.6.2021

1. Najděte všechna maximální (reálná) řešení lineární diferenciální rovnice pátého řádu
$$y^{(5)} - y = e^x.$$
(11 bodů).

2. Sečtěte řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, 4^n}{(2n+1)!}.$$
(8 bodů).

Řešení

1. Rovnice
$$y^{(5)} - y = e^x.$$
má charakteristický polynom
$$p_y(\lambda) = \lambda^5 - 1$$
který má kořeny
$$\zeta_n = \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + i\,\sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$
z nichž $\zeta_0 = 1$ je reálný, zatímco $\zeta_1 = \overline{\zeta_4}$ jakožto $\zeta_2 = \overline{\zeta_3}$ jsou komplexní. Řešení homogenní soustavy lze tedy psát ve tvaru
$$\begin{aligned} y_h = {} & a_0 e^x \\ & + e^{C_1 x}(a_1 \cos(S_1 x) + a_2 \sin(S_1 x)) \\ & + e^{C_2 x}(a_3 \cos(S_2 x) + a_4 \sin(S_2 x)), \end{aligned}$$
kde
$$\begin{aligned} C_1 &= \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \\ S_1 &= \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \\ C_2 &= \cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \\ S_2 &= \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \end{aligned}$$
Pro nalezení partikulárního řešení provedeme substituci
$$y_p = e^x z$$
$$p_z(\lambda) = p_y(\lambda + 1) = \lambda^5 + 5\lambda^4 + 10\lambda^3 + 10\lambda^2 + 5\lambda$$
Po substituci řešíme
$$z^{(5)} + 5z^{(4)} + 10z''' + 10z'' + 5z' = 1,$$

kde snadno uhádneme řešení $z = x/5$. Obecné řešení soustavy je součtem y_h a y_p, tj.

$$\begin{aligned} y = &\left(a_0 + \frac{x}{5}\right) e^x \\ &+ e^{C_1 x}(a_1 \cos(S_1 x) + a_2 \sin(S_1 x)) \\ &+ e^{C_2 x}(a_3 \cos(S_2 x) + a_4 \sin(S_2 x)), \end{aligned}$$

2. Sčítáme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, 4^n}{(2n+1)!} = f(4),$$

kde

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^n}{(2n+1)!}$$

je zřejmě mocninná řada s poloměrem konvergence $+\infty$. Pro $x \in (0, +\infty)$ platí

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!} \right)' \\ &= x \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' \\ &= x \left(\frac{\sinh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)' \\ &= \frac{\cosh(\sqrt{x})}{2} - \frac{\sinh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Součet řady je tedy roven

$$\frac{\cosh 2}{2} - \frac{\sinh 2}{4} \approx 0.9744$$